

ELEMENTOS DE CARTOGRAFÍA Y GEODESIA PARA INGENIEROS CIVILES

CARTOGRAPHY AND GEODESY ELEMENTS FOR CIVIL ENGINEERS

José Luis Pérez Díaz

Docente-Investigador, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH).

jose.perez@unach.mx,

Jorge Alberto Cabrera Madrid,

Maestro en Valuación Inmobiliaria.

jcabrera_madrid@hotmail.com

Eber Alberto Godínez Domínguez,

Docente-Investigador, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH).

eber.godinez@unach.mx,

Leopoldo Hernández Valencia,

Docente-Investigador, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH).

leopoldo.hernandez@unach.mx

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo presentar los fundamentos teóricos de las proyecciones cartográficas, basados en la forma y medidas de la Tierra que ofrece la ciencia de la Geodesia. En ingeniería civil, estos modelos cartográficos se aplican sobre la superficie terrestre para desarrollar los proyectos de obras civiles, donde radica el uso de la topografía y de la georreferenciación de los elementos de infraestructura existentes. Estos datos son obtenidos fácilmente mediante dispositivos como el GPS (Global Position System) que establece la ubicación precisa mediante coordenadas geodésicas o coordenadas UTM (Universal Transversa Mercator); sin embargo, es fundamental conocer los elementos teóricos para comprender las relaciones entre un sistema de coordenada geodésica y las proyecciones que resultan de los modelos para representar, en un plano bidimensional, cualquier punto sobre la superficie del esferoide de la Tierra mediante una técnica denominada, en el argot de la literatura matemática, como mapeo de funciones.

Palabras clave: Geodesia, cartografía, topografía, georreferenciación, mapeo de funciones.

ABSTRACT

The theoretical basis of cartographic projections, using Geodesy, based on the Earth's geometric shape and measurements are reported and discussed in this paper. In civil engineering, these cartographic models are applied on the earth's surface to develop civil works projects, where the use of topography and georeferencing of existing infrastructure elements is essential. Currently, available technology (e.g., GPS, Global Position System) facilitates these tasks through the precise location of geographical coordinates (latitude and longitude) or UTM (Universal Transverse Mercator) coordinates. However, it is essential to have the theoretical knowledge to fully understand the relationships between a geodetic coordinate system and the projections resulting from the models to represent, in a two-dimensional plane, any point on the surface of the Earth's spheroid, using a technique usually called, in the mathematical language, as function mapping.

Keywords: Geodesy, cartography, topography, georeferencing, function mapping.

INTRODUCCIÓN

El hombre desde los tiempos remotos siempre ha intentado describir la forma del mundo, había quienes pensaban que la Tierra era plana y sobre la bóveda celeste giraban los astros como el Sol, la Luna y las estrellas. Sin embargo, fueron los griegos con Aristóteles, de los primeros en sugerir que la forma del planeta debía ser una esfera, mediante la evidencia empírica de observar el horizonte y constatar la desaparición gradual de los navíos sobre la altamar. Eratóstenes, matemático griego de la antigüedad, basándose en esta idea de la Tierra en forma esférica, calculó el tamaño de la Tierra, empleando ingeniosamente la geometría con las sombras que se proyectaban en cierta época del año en dos ciudades diferentes, fallando en su intento de estimar el tamaño de la Tierra en alrededor del 1.6% menor de la medida real (Rapp, 1991).

En 1687, Isaac Newton formuló la Ley de Gravitación Universal en la que establece la relación entre la aceleración a la que caen y la distancia que los separa los objetos sobre la superficie de la Tierra del centro de la Tierra, por tanto, al determinar la aceleración de la gravedad, se observó que dicha aceleración variaba dependiendo de la ubicación del observador, deduciendo entonces que el radio de la Tierra no era igual en todos los puntos de la superficie terrestre, es decir la medida del radio sobre la línea del Ecuador es diferente a la medida del radio sobre la línea del eje polar y sugirió que esta variación se debía principalmente al efecto de rotación del globo terrestre sobre el eje polar.

Son muchos los hombres de ciencia que han contribuido en el desarrollo de la Geodesia para comprender y aplicar estos conocimientos en otras áreas del conocimiento. Así, podemos distinguir dos ciencias de la Tierra íntimamente ligadas entre sí y que resultan de carácter práctico dentro de la ingeniería, como son la geodesia geométrica y la cartografía.

Una definición moderna de Geodesia se encuentra en el texto *Geometric Geodesy* de Richard H. Rapp (Rapp, 1991) donde se define como “La Ciencia interdisciplinaria que utiliza medios espaciales y medios aéreos remotamente censados, y mediciones basadas en la Tierra para estudiar el tamaño y forma de la Tierra, los planetas y sus satélites, y sus cambios; para determinar en forma precisa posiciones y velocidades de puntos u objetos que se encuentran en la superficie u orbitando el planeta, dentro

de un sistema de referencia terrestre definido, y para utilizar este conocimiento a una variada gama de aplicaciones científicas y de ingeniería, usando las ciencias matemática, física, astronómica y computacional”.

Mientras que la cartografía la definen como “el conjunto de estudios y operaciones científicas y técnicas que intervienen en la formación o análisis de mapas, modelos en relieve y globos que representan la Tierra, parte de ella o cualquier otra parte del Universo” (Meynen, 1984).

Dentro de las representaciones cartográficas existen cinco proyecciones conformes de uso común por el Instituto Nacional de Geografía y Estadística de México (Gómez Moreno, 2004), las cuales son:

- a) Mercator.
- b) Gauss- Kruger.
- c) Universal Transversa Mercator (UTM).
- d) Cónica de Lambert.
- e) Estereográfica (UPS).

El presente trabajo se enfoca en describir y analizar las relaciones geométricas que guardan entre el sistema de coordenadas geográficas (latitud y longitud) y el modelo matemático de proyección tipo cilíndrica de coordenadas UTM (Universal Transversa Mercator) por ser actualmente de uso generalizado globalmente y empleado por la mayoría de los equipos de GPS (Global Position System).

MODELO GEOMÉTRICO DEL ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN

El elipsoide de revolución es una representación idealizada de la forma de la Tierra, y matemáticamente se

$$1. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

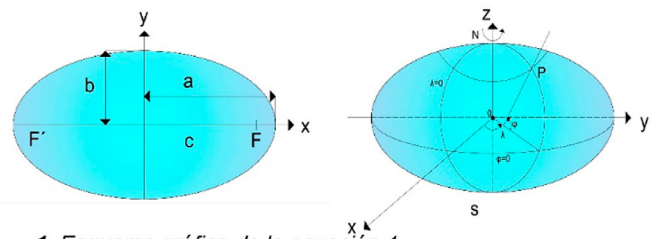


Figura 1. Esquema gráfico de la ecuación 1.

puede expresar mediante la siguiente ecuación:

Donde la superficie del globo terrestre se puede idealizar como un elipsoide de revolución que cumple con la ecuación 1, donde “a” representa la medida del radio ecuatorial (semi eje mayor de la elipse) y “b” representa la medida del radio polar semi eje menor de la elipse (Figura 1). Obviamente la superficie del globo terrestre no tiene las características para ser plana, pero dado que la curvatura de la Tierra es relativamente pequeña, es factible realizar mediciones como las proporcionadas por la topografía para fines prácticos de porciones de terreno de manera muy aproximada sin tomar en cuenta la curvatura de la Tierra.

Simplemente para fines de comparación, si el planeta fuera del tamaño de una pelota de 1.00 metro de diámetro, la montaña más alta como el Everest (8,848 metros) resultaría tan solo un montículo de 0.69 milímetros que sobresaldría de la superficie, mientras que la zona más profunda del océano, las Fosas Marianas en el Pacífico occidental se vería como una deformación de 0.86 milímetros, por lo que la ecuación del modelo teórico del elipsoide de revolución dentro de los rangos de valores prácticos resulta bastante ajustada a la curva real de la superficie terrestre.

No obstante, este concepto de elipsoide (modelo geométrico) no hay que confundirlo con el geoide que se debe más a las propiedades físicas de la Tierra, y que se define como el punto de equilibrio entre las fuerzas atractivas de la Tierra, las fuerzas gravimétricas del océano, la atracción de otros planetas o astros como la Luna, es decir el geoide se debe más a las propiedades de la fuerza de gravedad que ejerce el planeta sobre los objetos que están cerca de él.

En el presente artículo se hará empleo de las ecuaciones y propiedades geométricas del elipsoide de revolución por ser el sistema de referencia en que se basa el Sistema de Posicionamiento Global (GPS) en especial en los parámetros del WGS84 (World Geodetic System), según el cual el radio ecuatorial terrestre mide a=6,378,137.00 metros y el radio polar b=6,356,752.31424 metros.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LAS CURVAS MERIDIANAS

Suponiendo que en el plano XZ (Figura 2) ubicamos la curva de una elipse de cualquier meridiano, llamándoles

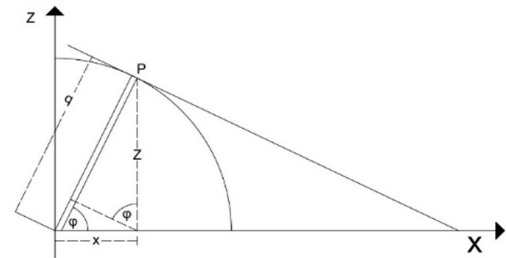


Figura 2. Esquema gráfico del Plano XZ.

meridianos a las curvas que parten del polo y atraviesan normalmente al plano del ecuador (plano X).

$$2. \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Sea la ecuación bidimensional en coordenadas cartesianas de la curva meridiana:

Entonces la pendiente de la tangente a cualquier

$$3. \frac{2x dx}{a^2} + \frac{2z dz}{b^2} = 0$$

$$4. z' = \frac{dz}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 z}$$

punto de la curva, nos la proporciona la primera derivada

$$5. z' = \tan(90^\circ + \theta)$$

$$6. z' = -\frac{b^2 x}{a^2 z}$$

$$7. \tan(90^\circ + \theta) = -\frac{b^2 x}{a^2 z}$$

$$8. -\cot \theta = -\frac{b^2 x}{a^2 z}$$

$$9. \tan \theta = \frac{a^2 z}{b^2 x}$$

de z con respecto a x.

$$10. z = \frac{b^2}{a^2} x \tan \theta$$

De la figura 2

Despejando z

Se define a la excentricidad “e” de la elipse como la

$$11. e = \frac{c}{a}$$

relación entre la distancia focal “c” y el semi eje mayor de la elipse “a” (Lehmann, 1991).

$$12. c^2 = a^2 - b^2$$

$$13. e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$14. b^2 = \frac{a^2}{1 - e^2}$$

$$15. z = (1 - e^2) x \tan \emptyset$$

Donde "c" es la distancia focal de la elipse (por

$$16. \frac{x^2}{a^2} + \frac{(1 - e^2)^2 x^2 \tan^2 \emptyset}{a^2 (1 - e^2)} = 1$$

Pitágoras)

$$17. x = \frac{a \cos \emptyset}{\sqrt{1 - e^2 \sen^2 \emptyset}}$$

$$18. z = \frac{a(1 - e^2) \sen \emptyset}{\sqrt{1 - e^2 \sen^2 \emptyset}}$$

Sustituyendo en la ecuación 2 por "z" y "b":

Despejando el valor de x:

De esta manera se determinan las ecuaciones paramétricas de las curvas meridianas en función de la variable \emptyset que representa la latitud geocéntrica (ángulo que forma el paralelo con respecto al plano del ecuador).

RADIO DE CURVATURA DE LAS SECCIONES NORMALES DEL MERIDIANO

Las curvas de intersección de los planos normales y las superficies del elipsoide son llamadas "secciones normales". En geometría diferencial se demuestra (Do Carmo, 1976) que en cada punto hay dos secciones normales mutuamente perpendiculares cuyas curvaturas resultan ser las máximas y mínimas y son llamadas "secciones normales principales". Estas secciones principales son las "sección normal del meridiano" y "sección del primer vertical" (Krakiwsky, 1973) y los denotaran por M y N.

Igualmente, en el campo de la geometría diferencial se define al radio de curvatura de la sección normal del meridiano M en un punto de una curva al recíproco de la

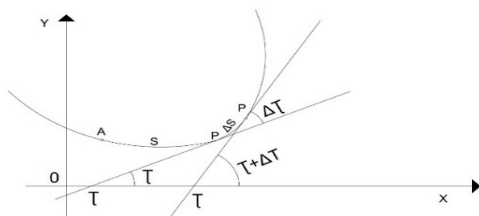


Figura 3. Esquema gráfico para obtener la Curvatura "K".

$$k = \frac{d\tau}{ds} = \frac{z''}{(1 + z'^2)^{3/2}}$$

curvatura en ese punto. Donde la curvatura "k" (Lipschutz, 1970) se define matemáticamente (Figura 3) como:

Luego, el radio de curvatura M se determina invirtien-

$$1. M = \frac{1}{k} = \frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{z''}$$

$$\text{Si } z' = -\cot \emptyset$$

$$z'' = \frac{d}{dx}(-\cot \emptyset)$$

$$z'' = \frac{d}{d\emptyset}(-\cot \emptyset) \cdot \frac{d\emptyset}{dx}$$

$$\text{Si } x = \frac{a \cos \emptyset}{\sqrt{1 - e^2 \sen^2 \emptyset}}$$

$$\frac{dx}{d\emptyset} = \frac{a(1 - e^2) \sen \emptyset}{(1 - e^2 \sen^2 \emptyset)^{3/2}}$$

$$\frac{d\emptyset}{dx} = \frac{(1 - e^2 \sen^2 \emptyset)^{3/2}}{a(1 - e^2) \sen \emptyset}$$

$$z'' = \left(\frac{1}{\sen^2 \emptyset} \right) \frac{(1 - e^2 \sen^2 \emptyset)^{3/2}}{a(1 - e^2) \sen \emptyset}$$

do esta relación:

$$k = \frac{d\tau}{ds} = \frac{z''}{(1 + z'^2)^{3/2}}$$

Luego, el radio de curvatura M se determina invirti-

$$1. M = \frac{1}{k} = \frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{z''}$$

Sustituyendo en la fórmula del radio de curvatura, M:
RADIO DE CURVATURA DEL PRIMER VERTICAL "N"

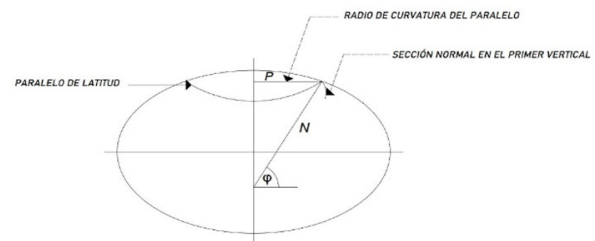


Figura 4. Esquema gráfico del radio de curvatura del primer vertical "N".

$$\cos \emptyset = \frac{p}{N}, \text{ donde } p = x \text{ (abscisa)}$$

Despejando N y sustituyendo p por x:

$$N = \frac{x}{\cos \emptyset}$$

$$3. N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sen^2 \emptyset}}$$

(FIGURA 4)

Este parámetro del radio de curvatura del primer vertical, N será posteriormente un parámetro indispensable para obtener las fórmulas de conversión de coordenadas.

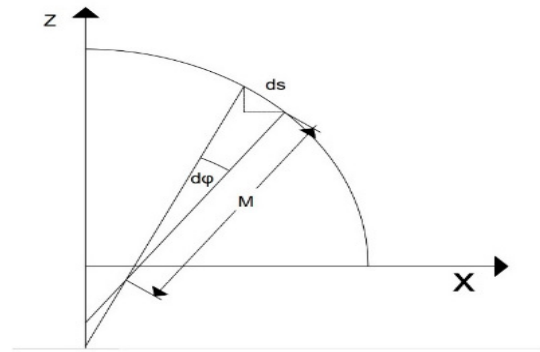


Figura 5. Esquema gráfico para obtener la Longitud del arco meridiano “S ϕ ”

LONGITUD DEL ARCO MERIDIANO “S ϕ ” (FIGURA 5)

$$dS_{\phi} = M d\phi$$

$$S_{\phi} = \int_0^{\phi} M d\phi$$

De la figura 5, se puede deducir que el diferencial de un arco meridiano es:

Sustituyendo la expresión para M (Ecuación 23), la

$$4. S_{\phi} = a(1 - e^2) \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{(1 - e^2 \text{sen}^2 \phi)^{3/2}}$$

longitud del arco meridiano a partir del plano del ecuador hasta la latitud ϕ es:

La integral anterior se trata de un integral tipo elíptica, que no admite una solución exacta mediante funciones,

$$5. \frac{1}{(1 - e^2 \text{sen}^2 \phi)^{3/2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \text{sen}^2 \phi + \frac{15}{8} e^4 \text{sen}^4 \phi + \frac{35}{16} e^6 \text{sen}^6 \phi + \dots$$

por lo que se empleará una serie binómica infinita para aproximarla, que al desarrollarla obtenemos:

$$\text{sen}^2 \phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\phi$$

$$\text{sen}^4 \phi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\phi + \frac{1}{8} \cos 4\phi$$

$$\text{sen}^6 \phi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2\phi + \frac{3}{16} \cos 4\phi - \frac{1}{32} \cos 6\phi$$

Empleando las siguientes identidades trigonométricas, para eliminar las integraciones de potencias de senos:

$$6. \frac{1}{(1 - e^2 \text{sen}^2 \phi)^{3/2}} = A - B \cos 2\phi + C \cos 4\phi + \dots$$

Mediante el empleo de las identidades trigonométricas

$$A = 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \dots$$

$$B = \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{10} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \dots$$

$$C = \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \dots$$

cas anteriores se puede convertir la ecuación 6 en:

Donde:

No obstante, en los cálculos numéricos los términos se puede suprimir $e < \frac{1}{12}$ las potencias mayores de 4 para la excentricidad “e”, en virtud que la excentricidad de la Tierra es pequeña, obteniéndose una rápida convergencia de la serie infinita requiriendo realmente pocos términos de la serie para obtener una mayor precisión para calcular

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{(1 - e^2 \text{sen}^2 \phi)^{3/2}} = A\phi - \frac{B}{2} \text{sen} 2\phi + \frac{C}{4} \text{sen} 4\phi - \dots$$

la longitud de cualquier arco meridiano.

Integrando la expresión 7, se tiene:

Se obtiene la siguiente fórmula para obtener la longitud del arco meridiano, a partir del plano del ecuador

$$7. S_{\phi} = a(1 - e^2) \left[A\phi - \frac{B}{2} \text{sen} 2\phi + \frac{C}{4} \text{sen} 4\phi \right]$$

hasta el ángulo ϕ que forma con el paralelo del punto (la-

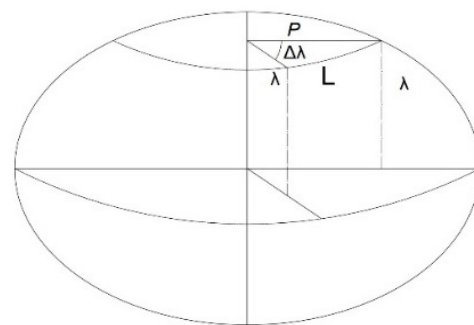


Figura 6. Esquema gráfico para obtener la longitud de un arco paralelo “S ρ ”.

titud):

$$8. dS_p = N \cos \varnothing d\lambda$$

$$9. S_p = N \cos \varnothing \lambda$$

LONGITUD DE UN ARCO PARALELO "SP" (FIGURA 6)

Donde:

PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS

El tema de representar la superficie elipsoidal de la Tierra requiere de un proceso matemático, ya que por cuidadoso que sea el tratamiento de la información siempre se introducirá un tipo de distorsión para poder realizar la transformación de la superficie terrestre de forma curva a un plano. Para llevar a cabo esta representación los cartógrafos se auxilian de las proyecciones, es decir de los métodos para transferir la imagen curvilínea del globo terrestre a un plano bidimensional (Gómez More-

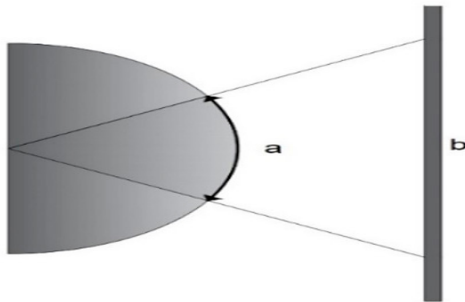


Figura 7. Esquema de una Proyección Cartográfica.

no, 2004). Para ejemplificar el caso de las proyecciones cartográficas se recurre a la Figura 7:

Se puede razonar que la distorsión se reduce si el plano cartográfico es tangente a la esfera, ya que en los puntos de tangencia la distorsión no existe y la unión de dichos puntos define las líneas de escala verdadera K_0 . Sin embargo, en realidad existen diferentes tipos de distorsiones que se pueden generar al proyectar el elipsoide de revolución a un plano.

Por consiguiente, una de las formas de clasificar las proyecciones es por las distorsiones que se generan o por las propiedades que conservan y dentro de las proyecciones las únicas propiedades que se conservan en todo plano cartográfico son las de conformidad y equivalencia (Snyder, 1987)

I. Por tipo de propiedades:

- a) Proyecciones equivalentes (conservan las distancias y áreas de las superficies representadas).

- b) Proyecciones conformes (conservan los ángulos que forman).

- c) Proyecciones afilácticas (No conservan ninguna de las propiedades anteriores).

II. Por tipo de superficie:

- A. *Proyecciones planas* (la superficie de referencia es un plano).

- d) Gnomónicas (las proyecciones tienen como punto de vista el centro de la Tierra).

- e) Estereográficas (tienen como punto de vista el punto diametral opuesto al punto de tangencia).

- f) Ortográficas (las proyecciones azimutales que tienen como punto de vista el infinito).

B. *Proyecciones cónicas*

- g) Normales (cuando coinciden con el eje de rotación de la Tierra).

- h) Transversas (el eje de simetría del cuerpo de referencia forma un ángulo recto con respecto al eje de rotación de la Tierra).

- i) Oblicuas (cuando no se cumplen ninguno de las anteriores).

C. *Proyecciones cilíndricas*

- j) Normales (cuando coinciden con el eje de rotación de la Tierra).

- k) Transversa (el eje de simetría del cuerpo de referencia forma un ángulo recto con respecto al eje de rotación de la Tierra).

- l) Oblicuas (cuando no se cumplen ninguno de las anteriores).

TEORIA MATEMÁTICA DE LAS PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS: EL CASO DE LA PROYECCIÓN UNIVERSAL TRANSVERSA DE MERCATOR (UTM)

El sistema nacional de coordenadas Universal Transversa de Mercator (UTM) es un sistema de proyección que, a diferencia del sistema de coordenadas geográficas, expresadas las longitudes y latitudes en grados angulares, las magnitudes en el sistema UTM se expresan en metros, teniendo como base de la proyección el elipsoide de referencia, en este caso el WGS84. La proyección transversa de Mercator es una variante de la proyección de Mercator ideado por el geógrafo flamenco Gerhard Kremer (más conocido por Gerardus Mercator), quien publicó su Carta del Mundo en 1569.

El sistema de coordenadas Transversa de Mercator resulta una proyección de acuerdo a la clasificación mencionada anteriormente del tipo cilíndrica, trans-

versa y conforme, es decir dentro de esta transformación se conservan los ángulos y las distancias, pero solo cuando se refieren cercano al ecuador, en cuanto a las demás latitudes se observa un factor de escala menor a 1, esto debido principalmente a una modificación al planteamiento original de Mercator, donde en lugar de hacer pasar un plano tangente al ecuador se hace pasar un plano secante a un meridiano central que corta a la superficie del elipsoide en dos puntos que comprende una zona meridional llamado husos.

El sistema UTM implica el uso de escalas no lineales para las coordenadas (X, Y) para asegurar que el mapa proyectado resulte conforme, por lo que el factor de escala en la dirección del paralelo y en la dirección del meridiano son iguales ($h=k$) en donde las curvas esféricas sobre la superficie terrestre, también denominadas loxodrómicas o líneas del rumbo (ya que corta todos los paralelos bajo el mismo ángulo) se representan como líneas rectas en el mapa y los meridianos se proyectan sobre el plano con una separación proporcional a la del modelo, habiendo equidistancia entre ellos, sin embargo, los paralelos se van separando a medida que se alejan del plano del ecuador.

En este sistema de coordenadas la Tierra se divide en 60 husos de 6° de longitud, cada huso se enumera con un número entre 1 y el 60, estando el primer huso limitado entre los meridianos 180° y 174° y centrado en el meridiano 177° Oeste. Cada huso tiene asignado un meridiano central, que es donde se sitúa el origen de coordenadas, junto con el ecuador, estos husos se enumeran en orden ascendente hacia el Este.

La teoría matemática para transformar coordenadas geográficas (esféricas) a coordenadas planas UTM (cartesianas) y viceversa, se conoce como mapeo dentro del campo de las funciones analíticas (en el plano de los números complejos). Técnicamente consiste en determinar una relación $f:A \rightarrow B$ biunívoca de A a B, empleando variable compleja $x+yi$ que se puede representar en un

$$\text{Si } z = x + yi \\ x + yi = f(\lambda + \varnothing i)$$

plano bidimensional mediante una rotación conforme (Marsden & Hoffman, 1996).

Obviamente se desconoce esta función de relación

$$x + yi = f(\lambda + \varnothing i) = f(\lambda_0 + \Delta\lambda + \varnothing i) \\ = i f(\varnothing) + \Delta\lambda \frac{df(\varnothing)}{d\lambda} - \frac{\Delta\lambda^2}{2!} i \frac{d^2 f(\varnothing)}{d\lambda^2} - \frac{\Delta\lambda^3}{3!} \frac{d^3 f(\varnothing)}{d\lambda^3} + \frac{\Delta\lambda^4}{4!} i \frac{d^4 f(\varnothing)}{d\lambda^4} \\ + \frac{\Delta\lambda^5}{5!} \frac{d^5 f(\varnothing)}{d\lambda^5} - \frac{\Delta\lambda^6}{6!} i \frac{d^6 f(\varnothing)}{d\lambda^6} + \dots$$

$f:A \rightarrow B$, pero se planteará una serie de Taylor para mapear dicha función de relación f :

Donde:

λ =es el meridiano de cualquier punto sobre la superficie (grados)

λ_0 =es el meridiano central del huso o zona UTM (grados)

$$\text{Huso} = \text{Zona}_{UTM} = 30 - \text{entero} \left(\frac{\lambda \text{ en grados}}{6} \right)$$

$$\lambda_0 = 183^\circ - 6 \times \text{Zona}_{UTM}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

El huso de referencia se determina mediante la siguiente expresión, según el meridiano del lugar:

La diferencia entre el meridiano del lugar y el meridiano central del huso, en radianes.

De las fórmulas para longitud de arco de meridianos y paralelos, se tiene que por ser las coordenadas UTM una

$$dS_\varnothing = dS_p \\ dS_\varnothing = M d\varnothing \\ dS_p = N \cos \varnothing d\lambda \\ M d\varnothing = N \cos \varnothing d\lambda \\ \frac{d\varnothing}{d\lambda} = \frac{N \cos \varnothing}{M}$$

$$\text{Sea: } f(\varnothing) = S_\varnothing = \int M d\varnothing$$

$$f(\varnothing) = S_p = \int N \cos \varnothing d\lambda$$

$$\frac{df(\varnothing)}{d\varnothing} = \frac{dS_\varnothing}{d\varnothing} = M$$

$$\frac{df(\varnothing)}{d\lambda} = \frac{dS_p}{d\lambda} = N \cos \varnothing$$

$$\frac{df(\varnothing)}{d\lambda} = \frac{df}{d\lambda} = N \cos \varnothing$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{df}{d\lambda} \right) = \frac{d}{d\varnothing} (N \cos \varnothing) \cdot \frac{d\varnothing}{d\lambda}$$

$$\frac{d^2 f(\varnothing)}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\varnothing} (N \cos \varnothing) \cdot \frac{N \cos \varnothing}{M}$$

proyección conforme debe cumplir con la proporcionali-

$$\frac{d}{d\varnothing} (N \cos \varnothing) = -M \tan \varnothing$$

$$\frac{d^2 f(\varnothing)}{d\lambda^2} = -\frac{N}{2} \tan 2\varnothing$$

$$\frac{d^3 f(\varnothing)}{d\lambda^3} = \frac{d}{d\varnothing} \left(\frac{d^2 f}{d\lambda^2} \right) \cdot \frac{d\varnothing}{d\lambda}$$

$$\frac{d^3 f(\varnothing)}{d\lambda^3} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\varnothing} (N \tan 2\varnothing) \cdot \frac{d\varnothing}{d\lambda}$$

$$\frac{d^3 f(\varnothing)}{d\lambda^3} = -\frac{1}{2} [N' \tan 2\varnothing + 2N \sec^2 2\varnothing] \cdot \frac{N}{M} \cos \varnothing$$

$$N' = \frac{dN}{d\varnothing} = (N - M) \tan \varnothing, \text{ (Thomas, 1952)}$$

dad al tratarse de una proyección conforme:

$$\frac{d^3 f(\vartheta)}{d\lambda^3} = -\frac{N}{2} [(N-M) \tan \vartheta \sin 2\vartheta \cos \vartheta + 2N \cos 2\vartheta \cos \vartheta] \cdot \frac{1}{M}$$

$$\frac{d^3 f(\vartheta)}{d\lambda^3} = -\frac{N}{2} [(N-M) \sin \vartheta \sin 2\vartheta + 2N \cos 2\vartheta \cos \vartheta] \cdot \frac{1}{M}$$

$$\frac{d^3 f(\vartheta)}{d\lambda^3} = -\frac{N}{4} \left[\left(\frac{N}{M} + 1 \right) \cos 3\vartheta + \left(\frac{3N}{M} - 1 \right) \cos \vartheta \right]$$

$$\frac{d^4 f(\vartheta)}{d\lambda^4} = \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{d^3 f}{d\lambda^3} \right) \frac{d\vartheta}{d\lambda}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 f(\vartheta)}{d\lambda^4} = & -\frac{1}{4} N' \left[\left(\frac{N}{M} + 1 \right) \cos 3\vartheta + \left(\frac{3N}{M} - 1 \right) \cos \vartheta \right] \frac{N \cos \vartheta}{M} \\ & - \frac{1}{4} N \left[\left(\frac{N}{M} \right)' \cos 3\vartheta - 3 \left(\frac{N}{M} \right) \right. \\ & \left. + 1 \right] \sin 3\vartheta + 3 \left(\frac{N}{M} \right)' \cos \vartheta - \left(\frac{3N}{M} - 1 \right) \sin \vartheta \left] \frac{N \cos \vartheta}{M} \end{aligned}$$

Donde:

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{N}{M} \right) = \left(\frac{N}{M} \right)' = \frac{-2(N-M)}{M} \tan \vartheta \quad (\text{Thomas, 1952})$$

$$\frac{d^4 f(\vartheta)}{d\lambda^4} = -\frac{N}{8} \left[2 \left(-1 + \frac{N}{M} + 4 \frac{N^2}{M^2} \right) \sin 2\vartheta + \left(1 + \frac{N}{M} + 4 \frac{N^2}{M^2} \right) \sin 4\vartheta \right]$$

$$\frac{d^5 f(\vartheta)}{d\lambda^5} = \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{d^4 f}{d\lambda^4} \right) \frac{d\vartheta}{d\lambda}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^5 f(\vartheta)}{d\lambda^5} = & \frac{N}{16} \left[2 \left(1 - 2 \frac{N}{M} + 13 \frac{N^2}{M^2} - 4 \frac{N^3}{M^3} \right) \cos \vartheta \right. \\ & \left. + \left(-3 + 2 \frac{N}{M} - 3 \frac{N^2}{M^2} + 44 \frac{N^3}{M^3} \right) \cos 3\vartheta + \left(1 + 2 \frac{N}{M} - 7 \frac{N^2}{M^2} + 28 \frac{N^3}{M^3} \right) \cos 5\vartheta \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d^6 f(\vartheta)}{d\lambda^6} = \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{d^5 f}{d\lambda^5} \right) \frac{d\vartheta}{d\lambda}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^6 f(\vartheta)}{d\lambda^6} = & -\frac{N}{32} \left[\left(5 - 6 \frac{N}{M} - 91 \frac{N^2}{M^2} + 364 \frac{N^3}{M^3} - 136 \frac{N^4}{M^4} \right) \sin 2\vartheta + 4 \left(-1 + \frac{N^2}{M^2} - 28 \frac{N^3}{M^3} \right) \right. \\ & \left. + 88 \frac{N^4}{M^4} \right] \sin 4\vartheta + \left(1 + 2 \frac{N}{M} + 33 \frac{N^2}{M^2} - 196 \frac{N^3}{M^3} + 280 \frac{N^4}{M^4} \right) \sin 6\vartheta \end{aligned}$$

Operando esta expresión con las ecuaciones para M y N:

Donde:

Igualando en la expresión de la serie de Taylor los tér-

$$x = \Delta\lambda \frac{df(\vartheta)}{d\lambda} - \frac{\Delta\lambda^3}{6} \frac{d^3 f(\vartheta)}{d\lambda^3} + \frac{\Delta\lambda^5}{120} \frac{d^5 f(\vartheta)}{d\lambda^5} + \dots$$

$$y = f(\vartheta) - \frac{\Delta\lambda^2}{2} \frac{d^2 f(\vartheta)}{d\lambda^2} + \frac{\Delta\lambda^4}{24} \frac{d^4 f(\vartheta)}{d\lambda^4} - \frac{\Delta\lambda^6}{720} \frac{d^6 f(\vartheta)}{d\lambda^6} + \dots$$

minos, relacionando las partes reales para x, y las imaginarias para y:

Como $\Delta\lambda < 1/19$ al calcular los términos de potencias mayores o igual a 4, arrojarían valores muy pequeños e insignificantes para la sumatoria de la serie, se concluye que la serie es rápidamente convergente y se podría escribir sin perder exactitud en las expresiones reducidas,

$$x \approx N\Delta\lambda \cos \vartheta + \frac{N}{24} \Delta\lambda^3 \left[\left(3 \frac{N}{M} - 1 \right) \cos \vartheta + \left(\frac{N}{M} + 1 \right) \cos 3\vartheta \right]$$

$$y \approx S_\vartheta + \frac{N}{4} \Delta\lambda^2 \sin 2\vartheta - \frac{N}{192} \Delta\lambda^4 \left[2 \left(-1 + \frac{N}{M} + 4 \frac{N^2}{M^2} \right) \sin 2\vartheta + \left(1 + \frac{N}{M} + 4 \frac{N^2}{M^2} \right) \sin 4\vartheta \right]$$

sustituyendo previamente por las derivadas del orden correspondiente:

En donde M y N, son los radios de curvatura normal

y del primer vertical, respectivamente y S_ϑ es la longitud del meridiano misma que se puede obtener con mucha aproximación reduciendo la expresión en virtud que la excentricidad de la Tierra $e < 1/12$ es relativamente pequeña y los términos de potencias mayores de 4 en la serie

$$S_\vartheta \approx a(1 - e^2) \left[\left(1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 \right) \vartheta - \left(\frac{3}{8} e^2 + \frac{15}{20} e^4 \right) \sin 2\vartheta \right]$$

trigonométrica se pueden omitir por ser numéricamente insignificantes:

Por convención dentro de este sistema de coordenadas a los meridianos de longitud Oeste, para evitar coordenadas negativas lo convinieron en sumarle el valor de 500,000 a la coordenada X, y para el caso de las regiones con latitudes al Sur sumarle al valor de Y en 10,000,000.

CONVERGENCIA DE MERIDIANOS Y

Sea un punto de coordenadas (ϑ, λ) donde la figura representa el plano de proyección con O'N como eje de las ordenadas y O'E como el eje de las abscisas del plano cartesiano y por otra parte A'Ng representa el Norte de la cuadrícula y A'Eg el Este de la cuadrícula son las líneas paralelas a los ejes y que pasan por el punto A'. La transformada del meridiano es la línea A'B' y la del paralelo la línea A'C'. El ángulo γ es la convergencia de meridianos en

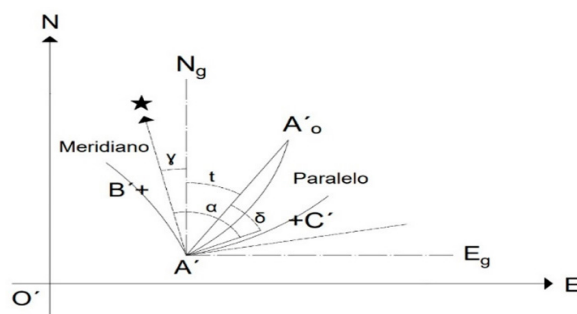


Figura 8. Esquema gráfico de convergencia de meridianos γ .

el punto A' y se mide desde la transformada del meridiano en el sentido de las agujas del reloj (Figura 8).

$$\tan \gamma = \frac{dx/d\lambda}{dy/d\lambda}$$

$$\tan \gamma = \frac{dx/d\vartheta}{dy/d\vartheta}$$

$$\gamma = \arctan \left(\frac{dx/d\vartheta}{dy/d\vartheta} \right)$$

Matemáticamente se define la convergencia de meridianos como (Thomas, 1952):

Las diferenciales tanto de $\frac{dx}{d\phi}$ como de $\frac{dy}{d\phi}$, se pueden obtener de las series de Taylor, calculando las derivadas con respecto a la variable ϕ que durante el desarrollo se obtuvieron. No se escriben las expresiones por ser extensas, pero numéricamente son factibles de obtenerlas porque las series son rápidamente convergentes.

FACTOR DE ESCALA UTM, K

A la hora de diseñar un mapa es necesario tener en cuenta el fin para el que va ser empleado, este fin conlleva a la elección del tipo de proyección, así como la escala a la que se va representar el mapa. Además, los topógrafos e ingenieros civiles no solo trabajan con coordenadas sino con los elementos geométricos realizando la mayoría de las veces mediciones directamente sobre mapas o

$$K_o = \frac{dS}{dS_p}$$

$$K_o = \frac{dS}{d\lambda} \bigg/ \frac{dS_p}{d\lambda}$$

$$K_o = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2}}{N \cos \phi} \text{ (Thomas, 1952)}$$

$$K_o = \frac{1}{N \cos \phi} \cdot \frac{dy}{d\lambda} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \frac{d\lambda}{d\lambda}\right)^2}$$

$$K_o = \frac{1}{N \cos \phi} \cdot \frac{dy}{d\lambda} \cdot \sqrt{1 + (\tan \gamma)^2}$$

$$K_o = \frac{1}{N \cos \phi} \cdot \frac{dy}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{d\lambda} \cdot \sec \gamma$$

$$K_o = \frac{\sec \gamma}{M} \cdot \frac{dy}{d\phi}$$

los planos donde la escala gráfica es importante dejarlo indicada. Para las proyecciones, se determina el factor de escala mediante la siguiente expresión matemática:

CONCLUSIONES

El estudio de las representaciones de la superficie de la Tierra por medio de modelos o mapas en un plano bidimensional es realizado mediante las proyecciones cartográficas, para las cuales se requieren algunas técnicas de matemáticas avanzadas, mismas que son parte de la formación básica durante los primeros semestres de las

carreras de ingeniería, por lo cual posibilita aplicar estos conocimientos para construir modelos de representación cartográfica.

Las aplicaciones de estas herramientas teóricas permiten construir modelos de representación gráfica de la Tierra como la de Universal Transversa Mercator (UTM), Gauss-Kruger, la Cónica de Lambert, Estereográfica (UPS) o inclusive la Transversa Modificada Ejdal (TME) empleada por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) para el procesamiento de datos y medición de los ejidos en México.

Al comprender estos diferentes modelos de representación, el manejo de la convergencia angular y el uso de escalas de representación, así como la conversión de un sistema de coordenadas geográficas a otra; permiten la acertada interpretación para el procesamiento y elaboración de planos ingenieriles, el trazo de línea base para los levantamientos topográficos, el replanteo de poligonales, de líneas de conducción o transmisión y proporcionar al personal de campo que ejerce la ingeniería, la topografía y la arquitectura los elementos teóricos en que se fundamenta los datos que se plasman en los planos y que frecuentemente generan confusión acerca de estos sistemas de coordenadas.

El que existan potentes herramientas digitales como Google Maps, Google Earth o los dispositivos portátiles GPS que disponen de estos algoritmos que proporciona esta teoría y además de ofrecer increíbles posibilidades como suelen ser interactivas y la puedas llevar consigo a cualquier sitio, no debemos olvidar que detrás de ella sigue vigente la cartografía y que en cada una de ellas, sigue siendo necesario el uso de las proyecciones cartográficas y de las demás técnicas propias de la cartografía, que finalmente como bien decía Claudio Ptolomeo “...*Estas cosas pertenecen a la más noble y a la más bella de las aventuras intelectuales, el mostrar la inteligencia humana por medio de las matemáticas...*”

REFERENCIAS

- Do Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New Jersey: Prentice Hall.
- Gómez Moreno, R. A. (2004). *Guía de Proyecciones Cartográficas*. México: Instituto Nacional de Geografía y Estadística.
- Krakiwsky, E. J. (1973). *Conformal Maps Projections in Geodesy*. Canada: University of New Brunswick.
- Lehmann, C. (1991). *Geometría Analítica*. México: Limusa.
- Lipschutz, M. (1970). *Differential Geometry*. Co, USA: Mc Graw Hill Book.
- Marsden, J., & Hoffman, M. (1996). *Basic Complex Analysis*. New York: W. H. Freeman.
- Meynen, E. (1984). *Multilingual Dictionary of Technical Terms in Cartography*. French and Europeans Pubns.
- Rapp, R. (1991). *Geometric Geodesy*. Ohio, USA: Ohio State University.
- Snyder, J. (1987). *Map Projections a Working Manual*. Washington, D. C.: Geological Survey.
- Thomas, P. (1952). *Conformal Projections in Geodesy and Cartography*. Washington, D. C.: Government Printing Office.